Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica
Año 18, Nº 23, Enero – Junio 2020
ISSN 0717 – 9065 ISSN ON LINE 0719 – 8019
Artículo de investigación, pp.24 - 46

Resoluciones de una tarea de cálculo por parte de profesores de matemáticas. ¿Cuáles son los argumentos que ellos validan tanto en su trabajo personal como en el aula?

Romina Menares Espinoza [1]

Resumen
En este artículo presentamos diferentes maneras de enfrentar un problema de cálculo por parte de profesores de secundaria en ejercicio en el sistema escolar chileno. Nuestro objetivo es indagar en procesos de visualización, distintos instrumentos utilizados y argumentos que profesores despliegan al resolver o dar respuesta a un problema. Además, buscamos conocer cuáles son los argumentos que los profesores validan dentro del desarrollo de problemas que demandan procesos argumentativos, tanto en su propio trabajo con el problema como en el posible trabajo en el aula. La investigación es cualitativa y se realiza bajo la perspectiva teórica de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). El estudio nos permite evidenciar diferentes recursos utilizados por los profesores para la resolución del problema, reconocer los discursos matemáticamente aceptados por los docentes y observar qué significa para el grupo de profesores la justificación de un co-nocimiento matemático.
Palabras clave: Espacio de Trabajo Matemático, visualización, argumentación, profesores de secundaria.

[1]Universidad de Valparaíso. Valparaíso, Chile. romina.menares@uv.cl. ORCID:0000-0002-6071-3825

Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica
Año 18, No 23, Enero – Junio 2020
ISSN 0717 – 9065 ISSN ON LINE 0719 – 8019
Artículo de investigación, pp.24 - 46

Solutions of a calculus task by math teachers. What are the arguments that they validate both in their personal work and in the classroom?

Romina Menares Espinoza [1]

Abstract

In this article we present different ways of dealing with a problem of calculation on the part of secondary school teachers who practice their profession in the Chilean school system. Our objective is to investigate visualization processes, different instruments used and arguments that teachers deploy when solving or responding to a problem. In addition, we seek to know which are the arguments that teachers validate within the development of problems that demand argumentative processes, both in their own work with the problem, as the possible work in the classroom. The research is qualitative and is carried out under the theoretical perspective of the Mathematical Working Spaces (MWS). The study allows us to evidence different resources used by teachers to solve the problem, to recognize the discourses mathematically accepted by the teachers, and to observe what the justification of a mathematical knowledge means for the group of teachers.

Key words: curricular appropriation, mathematical thinking skills, evaluation, educational policy, learning communities.

[1] Universidad de Valparaíso. ✉ romina.menares@uv.cl. ORCID:0000-0002-6071-3825

1. Introducción

El profesor de matemáticas es un sujeto que, desde el rol de enseñante, debe buscar formas y mecanismos para que otros aprendan matemáticas. Ante este propósito, el docente posee una gama de recursos a los que podría acogerse. Uno de ellos es recurrir a los conocimientos que adquirió en el colegio como estudiante y que posterior-mente profundizó en su formación inicial en la universidad. Probablemente, el profesor asuma que la matemática que es parte de su dominio de conocimiento necesita de adaptaciones para ser devuelta al aula de secundaria con el objeto de lograr aprendizaje en sus estudiantes.

Ante esta situación, uno de los desafíos a los que se ve enfrentado el profesor es el de entender "la esencia" de lo que aprende a nivel universitario y la relevancia que eso tiene en el colegio (Winslow y Gronbaek, 2014). El profesor debe preocuparse de realizar transposiciones didácticas adecuadas, lo que implica cuestionarse sobre cómo transformar los objetos y sus manipulaciones –la mayoría tratados en la universidad– y llevarlos de manera idónea al colegio.

El problema sobre el conocimiento que debe tener el profesor de matemáticas ha sido ampliamente abordado en la didáctica de la disciplina (ver, por ejemplo, Shulman, 1986; Ball, Thames y Phelps, 2008; Ball, Hill y Bass, 2005; Espinoza, Zakaryan y Carrillo, 2018; Zakaryan et al., 2018; Winslow y Gronbaek, 2014), en la que no ha sido puesto en duda el hecho de que el profesor deba tener un amplio dominio de las matemáticas. En efecto, los cuestionamientos desembocan en un problema evidentemente mayor, que tiene relación no solo con lo que el profesor sabe, sino con la profundidad que alcanza sobre el conocimiento, cuáles han sido los procesos para su construcción y qué puede llegar a decir a otros sobre lo que sabe. Esto último en especial es relevante si se considera que el profesor es un ente que enseña.

Años atrás, Klein (1908) se refería al fenómeno de las brechas existentes, primero, en el paso de los profesores desde su formación secundaria a la universidad como estudiantes y, más tarde, en la vuelta al liceo como maestros, catalogándolo como una "doble dis-continuidad". Para este segundo paso, Klein describe la problemática del joven profesor, quien en la enseñanza de la matemática en la escuela (sobre todo cuando se encuentra con métodos antiguos y tradicionales de enseñar matemáticas) no encuentra por sus propios medios alguna relación con sus estudios universitarios, los que terminan no te-niendo influencia en su enseñanza. El problema del joven profesor, planteado por Klein a principios del siglo XX, persiste en la actualidad y diversos autores de la didáctica de la matemática están preocupados de ello (ver, por ejemplo, Ball, Thames y Phelps, 2008; Winslow y Gronbaek, 2013).

El objetivo de esta investigación es estudiar la manera en que seis profesores de secundaria en ejercicio enfrentan un problema de cálculo, el cual demanda movilizar procesos de visualización, instrumentalización y prueba. Fundamentalmente, buscamos ha-llar en las resoluciones de los profesores los elementos del cálculo que ponen en juego y cómo los articulan, lo que reconocen como argumento válido y lo que entienden como justificación del conocimiento matemático.

El currículum escolar en Chile reconoce cuatro habilidades fundamentales en los procesos de aprendizaje de las matemáticas, por lo que los profesores deben promover su desarrollo en el aula; estas son: resolver problemas, argumentar y comunicar, modelar, y representar (MINEDUC, 2019). Por lo tanto, resulta relevante para nosotros conocer cuáles son aquellos argumentos y maneras de proceder que el profesor valida frente a una situación que demanda el uso de algunas de estas habilidades.

2. Aspectos teóricos: Espacio de Trabajo Matemático

Realizamos los análisis enmarcados en la teoría Espacios de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011b), pues esta nos permite observar aspectos de la visualización provenientes de procesos semióticos, aspectos instrumentales y procesos discursivos en la actividad matemática, y reconocer la dinámica que se da entre tales procesos, cuestión que nos interesa al momento de analizar el trabajo matemático que realiza el profesor frente a un problema que involucra contenidos del cálculo.

La teoría fue planteada inicialmente en el dominio de la geometría por Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006) y Kuzniak (2011a), y luego ampliada a otros dominios de las matemáticas por Kuzniak (2011b). En tal ampliación, se consideran aspectos presentes en la actividad matemática específica para cada dominio (Kuzniak, Tanguay y Elia, 2016). En efecto, para cierto dominio de las matemáticas (en este artículo consideramos el dominio del cálculo), se consideran dos planos: uno epistemológico y otro cognitivo. El primero tiene relación con los objetos, su naturaleza y la estructura matemática en la cual estos se encuentran inmersos. El plano cognitivo se relaciona con la utilización que el sujeto da a los elementos del plano epistemológico, y los procesos relacionados con ese uso.

Así, el Plano Epistemológico lo conforman las componentes: Representamen (referida a los signos y símbolos), Artefactos y Referencial Teórico. El Plano Cognitivo está

ISSN 0717 – 9065 ISSN ON LINE 0719 – 8019

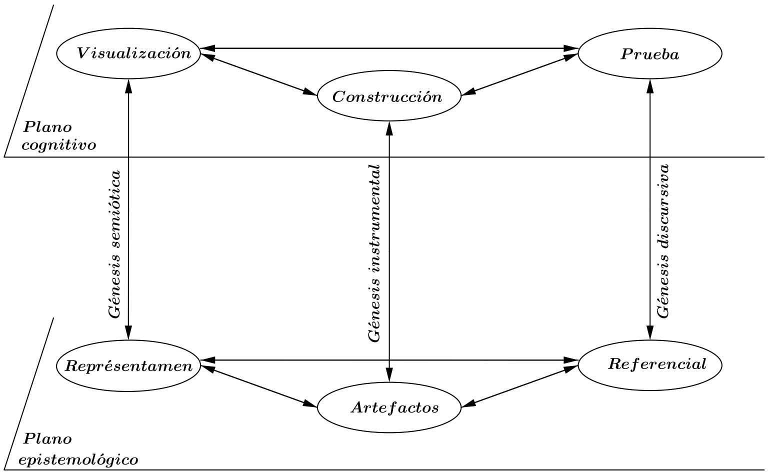


Figura 1: Diagrama ETM de las componentes epistemológicas y cognitivas, y génesis.

conformado por las componentes: Visualización (ligada a los procesos semióticos), Construcción (con relación al uso de artefactos) y Prueba (en el sentido amplio de la palabra, es decir, no se considera prueba solo como una demostración, sino que hay lugar para otros razonamientos, como la argumentación o la justificación).

Los planos epistemológico y cognitivo, naturalmente, no se encuentran aislados en un trabajo matemático. En efecto, se trata de una articulación "uno a uno" de las componentes de cada plano a través de tres génesis (Figura 1).

La "génesis semiótica" implica procesos de visualización y elementos del representamen. Esta génesis se refiere a las distintas representaciones y a los procesos semióticos (Duval, 2005) de tratamiento y conversión que experimenta un individuo al verse enfrentado a una tarea. En esta génesis también se acoge la noción de signo y símbolo en el sentido de Peirce (1978), para lo cual se necesita tomar en cuenta la tríada "significado", "significante" e "interpretación". Para Peirce, el signo de un objeto se utiliza para una interpretación particular, y es esta interpretación, en cierto modo, el término intermedio entre el signo material y el objeto que denota ese signo; su rol consiste principalmente en asegurar el vínculo entre los dos términos: el signo material y el objeto. Además, Pierce señala que un signo es toda cosa que significa algo para alguien, en otras palabras, el significado del signo es su objeto y lo que se considera es su interpretación; en cuanto se suprima el objeto o la interpretación, el signo no tendría ninguna razón de ser.
La "génesis instrumental" reposa en artefactos (Rabardel, 1995) que necesitan de la dialéctica instrumentación e instrumentalización descrita en el enfoque instrumental

(Artigue, 2002; Trouche, 2004). Actualmente se considera también el concepto de herramienta (Kuzniak, Nechache y Drouhard, 2016) –que puede ser material o simbólica– para ampliar la idea de artefactos, que son generalmente de naturaleza material o pueden reproducir acciones similares a las de las herramientas materiales en ambientes informáticos. Las herramientas, en cambio, también pueden ser conceptuales, teoremas, algoritmos o colecciones de signos. Cuando a la herramienta le es asociado un esquema de uso (que puede ser el resultado de la construcción del sujeto o la apropiación del sujeto de los esquemas de usos que socialmente se dan) pasa a ser un instrumento.

La "génesis discursiva" articula los componentes referenciales teóricos con la prueba. Como ya se mencionó, la noción de prueba se refiere a un sentido amplio que toma en consideración las tipologías de prueba de Balacheff (1987) y la noción de razonamiento de Duval (1995), y que incorpora las inferencias explícitas y los actos de exploración.

Desde la geometría, y los espacios de trabajo sobre este dominio, se distinguen tres tipos de ETM –definidos por Houdement y Kuzniak (2006)– según la función de quien enfrenta una tarea matemática. Estos tipos de ETM son llevados a otros dominios de las matemáticas. La caracterización de los distintos ETM se realiza en términos de la relación con el saber, en términos didácticos y según el sujeto que aborda la tarea. A continuación se describen los tres tipos de ETM.

ETM de referencia: Se refiere al espacio de trabajo definido de manera ideal en función de criterios matemáticos. Es el espacio de trabajo más cercano al saber sabio. El utilizador natural de este ETM es un "experto epistémico", es decir, se puede considerar como el ETM institucional de la comunidad de matemáticos.

ETM idóneo: Se refiere al espacio definido en términos didácticos, es decir, en este espacio se concibe la reflexión sobre la reorganización didáctica de las componentes del espacio de trabajo. Un utilizador natural de este ETM es el profesor, para quien el espacio de trabajo organizado resulta idóneo.

ETM personal: Se refiere al espacio definido por un utilizador particular como resultado de la reflexión entre los conocimientos aprendidos y los puestos en práctica por el individuo que resuelve problemas en matemáticas. Este ETM depende del usuario. Un utilizador natural de este ETM es el estudiante, aunque es posible considerar los ETM personales del profesor o del investigador matemático, dependiendo del contexto.

Según la institución a la que se refiere, los ETM en cuestión pueden variar; así, por ejemplo, el ETM idóneo de una institución universitaria que forma profesores puede convertirse en ETM de referencia para profesores en ejercicio. En otras palabras, el tipo de ETM depende del individuo que se considera.

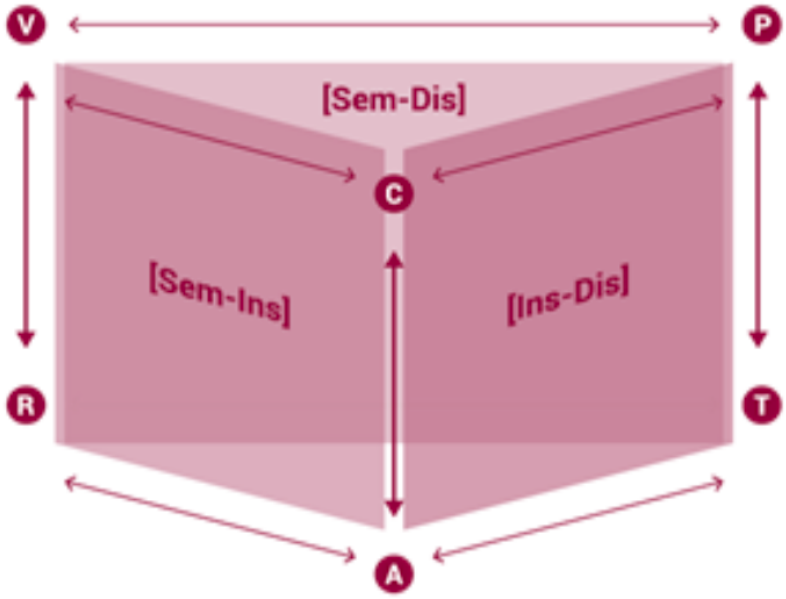


Figura 2: Diagrama ETM de los planos verticales

Para que un espacio de trabajo matemático se active, necesita de una tarea que lo motive y le dé sentido. Esta tarea no es parte del ETM, pero sin ella no sería posible desencadenar movimientos entre las génesis. Para definir lo que entendemos como tarea en el ETM, adoptamos el término desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Chevallard (1999), como aquella que supone un verbo y un objetivo a realizarse en matemáticas (relativamente preciso).

Por último, la complementariedad y los vínculos entre génesis se identifican como planos verticales del ETM (Coutat y Richard, 2011; Richard y Kuzniak, 2014) (Figura 2) ([Sem-Ins], [Ins-Dis] y [Sem-Dis]). En general, analizamos la actividad matemática en cuanto a los planos verticales que se activan y de qué manera lo hacen.

3. Aspectos metodológicos: sujetos participantes, instrumento y recogida de datos

En términos generales, nuestra investigación corresponde a un estudio cualitativo, que considera un caso múltiple de tipo instrumental (Stake, 2000). Además, la población objetivo fue escogida de manera intencional (Ruiz, 2003). En particular, estudiamos la reacción que tuvieron profesores en servicio ante las mismas tareas, de manera no simultánea, con el objetivo de indagar en la movilidad epistémica de los profesores en cuanto al uso de proposiciones, conectivos lógicos, formas de visualizar, uso de instrumentos y, sobre todo, en lo relativo a lo que cada profesor considera como una justificación válida.

En la investigación consideramos un caso múltiple de 6 profesores de secundaria en servicio, más un caso piloto de 2 profesores que cumplían ciertas características. Para captar los significados que otorgan los profesores a objetos o procesos matemáticos, realizamos un cuestionario y una entrevista. La entrevista complementa al cuestionario y busca indagar de manera más exhaustiva el valor que da el profesor a la matemática que pone en juego en las tareas que se plantean; el cuestionario consta de tres tareas y seis preguntas. En este artículo mostraremos los resultados para una de las tareas del cuestionario, además de lo que los profesores declaran en la entrevista en relación con tales tareas.

3.1. Sujetos participantes en el estudio

En una primera instancia se seleccionan 2 profesores para el pilotaje con el fin de refinar el instrumento una vez realizados los análisis. Los sujetos participantes fueron seleccionados de manera intencional de tipo opinático, pues se trata de profesores que voluntariamente acceden a colaborar con el estudio (Ruiz, 2003). Hemos utilizado la notación PP1 y PP2 (Profesor Prueba 1 y 2) para identificar a los 2 profesores que participaron en el pilotaje.

El caso PP1 se trata de un profesor con 4 años de experiencia docente, que actualmente se desempeña en autoría y edición de textos escolares para enseñanza media. El caso PP2 es un profesor con 7 años de experiencia como docente, con postgrado en didáctica de la matemática y que además ha realizado clases de matemáticas en universidades.

Luego de refinado el instrumento, se seleccionan seis profesores escogidos de manera intencional tipo teórico (Ruíz, 2003), pues se eligen siguiendo ciertos criterios que interesaban en la investigación: profesores nóveles (con 3 o menos años de experiencia en el sistema escolar), profesores con más de 3 años de experiencia; profesores que se encuentran ejer-ciendo clases en el momento de la experiencia en colegios de distinto carácter: estatales, técnico-profesionales, privados; profesores que dictan algún curso en la universidad y otros que no lo han hecho; y profesores que tienen y que no tienen postgrados en matemáticas. Llamamos a los profesores PE1, PE2, PE3, PE4, PE5 y PE6.

Los profesores PE1 y PE2 corresponden a docentes con 9 años de experiencia en el aula. Ambos tienen un magíster en matemáticas y, al momento de la experimentación, se encontraban dictando clases en enseñanza media en un colegio particular pagado de la Región de Valparaíso y cursos de cálculo en la universidad. PE1 cursa un doctorado en didáctica de la matemática en una universidad del país y PE2 tiene un diplomado en docencia.

El profesor PE3 posee 7 años de experiencia docente. En el momento de la recogida de datos, PE3 se encontraba realizando clases en un liceo municipal de la Región de Valparaíso y cursando estudios de magíster en didáctica de la matemática. PE3 no tenía experiencia como docente en instituciones de educación superior.

Los profesores PE4 y PE5 corresponden a profesores nóveles, con 2 años y medio de experiencia docente al momento de la recogida de datos. PE4 tiene un magíster en didáctica de la matemática, y PE5 cursaba el mismo magíster. Ambos realizaban clases en el mismo liceo municipal (estatal), con formación técnica-profesional, de la Región de Valparaíso y no tenían experiencia como profesores en instituciones de educación superior.

Tabla 1: Síntesis del perfil de los profesores que participaron en el estudio

Profesores	Años experiencia docente	Región	Tipo de institución en la que ejerce	Cursos dictados en Educación superior	Estudios de postgrado
PE1	9	Valparaíso	Liceo particular-pagado	Cálculo 1	Sí
PE2	9	Valparaíso	Liceo particular-pagado	Cálculo 1	Sí
PE3	7	Valparaíso	Liceo particular-subvencionado	Ninguno	Sí
PE4	2,5	Valparaíso	Liceo municipal (técnico/profesional)	Ninguno	Sí
PE5	2,5	Valparaíso	Liceo municipal (técnico/profesional)	Ninguno	Sí
PE6	6	Metropolitana	Liceo particular-subvencionado	Ninguno	No

El profesor PE6 corresponde a una docente con 6 años de experiencia, que al momento de la experimentación realizaba clases en un liceo particular subvencionado por el Estado de la Región Metropolitana. La docente posee el título de profesora de matemáticas y física. PE6 no tenía estudios de postgrado ni experiencia en instituciones de educación superior al momento de la recogida de datos.

La tabla 1 muestra una síntesis de los casos descritos.

3.2. Instrumento, recogida de datos y categorías de análisis

Para realizar el estudio se consideraron dos instrumentos: un cuestionario con tres tareas, y una entrevista semi-abierta realizada a cada profesor. Los cuestionarios se aplicaron de manera no simultánea en cuanto a días y lugares para cada profesor. En este artículo mostraremos los resultados de las respuestas de los profesores a una de las tareas (Tarea 1), la cual se enuncia a continuación. Cabe destacar que esta tarea puede ser abordada con estudiantes de liceo siempre y cuando hayan estudiado funciones trigonométricas y ecuaciones. Sin embargo, de no haber estudiado funciones continuas ni Teorema del Valor Intermedio, se deben buscar formas alternativas de abordar la tarea, como el uso de las gráficas, por ejemplo.

Tarea 1: ¿La ecuación $\sin(x) = 1 - x$ tiene solución $x_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$? Justifique su respuesta

Finalizado el cuestionario por parte del profesor, se realiza la entrevista. Las preguntas de la entrevista apuntan a las estrategias utilizadas para resolver el problema, a la utilización (o no utilización) de una función (que en este caso es continua, propiedad que puede ser relevante para algunos argumentos), a la validez de los argumentos utilizados y a la pertinencia de plantear este tipo de tareas a estudiantes del colegio. Concretamente, las preguntas que guiaron la entrevista fueron las siguientes:

- Pregunta 1: ¿Cómo describiría la estrategia que utilizó para responder al problema?
- Pregunta 2: ¿Utiliza alguna función para abordar el problema?, si su respuesta es "sí", ¿qué características tiene esa función?
- Pregunta 3: ¿Considera válidos los argumentos o los procedimientos que usted utilizó para responder al problema?, ¿por qué?
- Pregunta 4: ¿Plantearía este problema a estudiantes del colegio?, si su respuesta es "sí", ¿para qué nivel de enseñanza?

Como en un principio enfrentamos a cada profesor a la tarea, el análisis de las resoluciones corresponde en términos teóricos al estudio de su ETM personal. En cuanto a las categorías utilizadas para analizar los resultados, utilizamos los planos verticales del ETM. Para ello, identificamos las génesis que se activan en la resolución de la tarea y observamos cómo se articulan.

4. Análisis de resultados

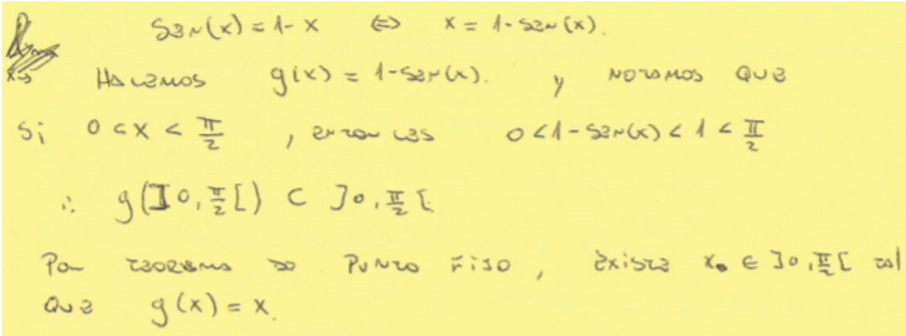
Respecto a los resultados, evidenciamos diferentes formas de abordar la tarea por parte de los profesores, lo que implicó el uso de distintos objetos, signos y símbolos, registros y argumentos variados para responder a la pregunta que demandaba la tarea. Mostraremos el análisis de las respuestas de cada profesor, para luego realizar una síntesis de los principales resultados encontrados.

4.1. Respuesta del profesor PE1

El profesor PE1 muestra dos producciones distintas para la tarea. Para la primera resolución, utiliza principalmente lenguaje algebraico. Notamos que PE1 establece una función a partir de la ecuación planteada, lo que podríamos interpretar como la construcción de una herramienta simbólica (la función), que más tarde pondrá en uso para responder a la pregunta pues la utilizará para sus hipótesis. También podemos decir que hubo tratamientos dentro de la génesis semiótica, pues una ecuación pasa a ser una fórmula que define una función, lo que implica cambios de signos, pero también de objetos (objeto ecuación a objeto función). Podemos notar además que los procesos, ya sea semióticos o instrumentales, son motivados por la intención de dotar al referencial teórico (en la génesis discursiva) de las hipótesis del "teorema del punto fijo" (ver Figura 3) y por lo tanto, lograr una prueba. En ella, la continuidad de la función está presente solo de manera implícita (en el teorema), pero no se declara en las hipótesis.

Podemos decir que PE1 activó los planos verticales del ETM [Sem-Dis] e [Ins-Dis], por lo que es relevante en su trabajo la presencia de un discurso. El razonamiento que se pone en evidencia tiene carácter de demostración, aunque no es completo, pues falla en la continuidad de la función.

La segunda resolución de la tarea por parte de PE1 (Figura 4) tiene un carácter parecido a la primera; nuevamente PE1 utiliza lenguaje algebraico y dentro de la génesis semiótica se realizan tratamientos en el registro algebraico: realiza transformaciones desde una ecuación a una función, lo que implica un cambio de signos. Además, utiliza límites (como elemento del referencial teórico) y realiza tratamientos con este objeto. Los procesos semióticos en este trabajo son motivados por la intención de dotar al referencial



$\operatorname{sen}(x) = 1 - x \iff x = 1 - \operatorname{sen}(x)$.

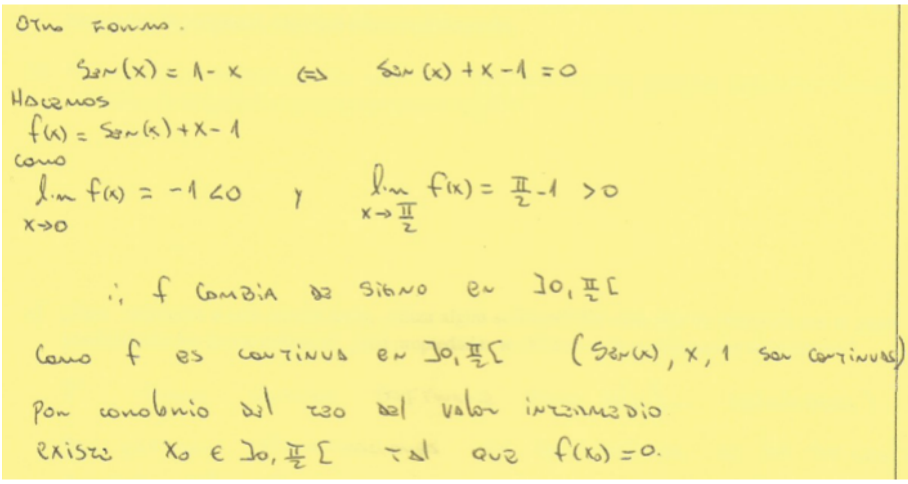
Hacemos $g(x) = 1 - \operatorname{sen}(x)$. y notamos que

si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, entonces $0 < 1 - \operatorname{sen}(x) < 1 < \frac{\pi}{2}$

$\therefore\ g(]0, \frac{\pi}{2}[) \subset]0, \frac{\pi}{2}[$

Por teorema de punto fijo, existe $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $g(x) = x$.

Figura 3: Primera estrategia de la producción del profesor PE1 para la tarea.



Otra forma.

$\operatorname{sen}(x) = 1 - x \iff \operatorname{sen}(x) + x - 1 = 0$

Hacemos

$f(x) = \operatorname{sen}(x) + x - 1$

como

$\lim_{x \to 0} f(x) = -1 < 0$ y $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0$

$\therefore$ f cambia de signo en $]0, \frac{\pi}{2}[$

Como f es continua en $]0, \frac{\pi}{2}[$ ($\operatorname{sen}(x)$, x, 1 son continuas)

Por corolario del teo del valor intermedio

existe $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $f(x_0) = 0$.

Figura 4: Segunda estrategia de la producción del profesor PE1 para la tarea.

teórico de elementos (en la génesis discursiva); en este caso construye las hipótesis del "teorema del valor intermedio". Además, se utilizan los límites de la función en los puntos extremos y, de manera explícita, la continuidad de funciones para argumentar, primero, que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ y segundo, para decir que como los límites cambian de signo en los extremos del intervalo, entonces, por continuidad, la función tiene una raíz en el intervalo abierto.

En la entrevista que se realizó luego de que PE1 resolviera la tarea, este califica sus resoluciones como demostración e identifica el uso de funciones continuas. Respecto a si plantearía esta tarea a estudiantes del colegio, PE1 señala que este problema se puede plantear en la enseñanza escolar, pues, por un lado, en el colegio se estudian ecuaciones, y, por otro, en secundaria se estudian funciones trigonométricas en cursos electivos. Además, el profesor señala que *estos problemas se pueden plantear en el colegio siempre que se muestre una interpretación muy visual de ellos.*

4.2. Respuesta del profesor PE2

En la resolución de la tarea, PE2 toma dos caminos; en el primero, intenta construir las hipótesis para utilizar el TVI, pero luego aborta esta estrategia y construye una nueva, basada en la gráfica (Figura 5).

Para el primer camino, utiliza principalmente lenguaje algebraico. Dentro de la génesis semiótica, se realizan tratamientos en el registro algebraico: se transforma una ecuación en una regla que define una función, incorporando la expresión $f(x)$. Estos procesos son motivados por la intención de dotar al referencial teórico (en la génesis discursiva) de las hipótesis del TVI. Además, se utilizan límites de funciones como elementos del referencial teórico. En esta parte del trabajo se privilegia el plano [Sem-Dis], aunque podemos decir también que la función construida es parte de la componente artefacto (simbólico), por lo que habría una activación del plano vertical [Ins-Dis]. PE2 no utiliza la propiedad de continuidad en sus argumentos.

Para la segunda estrategia, PE2 construye el gráfico de las dos funciones obtenidas mediante la conversión de los registros; estas son: $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = 1-x$, y buscan obtener un punto donde $f(x) = g(x)$. Los tratamientos en el registro algebraico se realizan con el objetivo de encontrar aquellas funciones que se graficarán. Podemos decir que las funciones construidas constituyen artefactos simbólicos en el TME. Finalmente, PE2 concluye que *gráficamente, existe solución en el intervalo* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Nuevamente se activan los planos [Sem-dis] e [Ins-Dis], pero el horizonte de trabajo es distinto. En efecto, en esta segunda estrategia de PE2 existe la gráfica y la intersección de las funciones como recurso para entregar argumentos en la respuesta a la pregunta de la tarea.

Cuando se le consulta a PE2 sobre su estrategia, señala que *solo pude resolverlo de manera gráfica, por lo que no es del todo válido intenté resolverlo usando el TVI, porque recuerdo de la universidad que así se hacía, pero no me resultó además, recuerdo que había una diferencia entre considerar un intervalo cerrado y otro abierto, pero no recuerdo por qué*. Estas respuestas ponen en evidencia que PE2 no valida del todo sus argumentos donde utiliza la gráfica a modo de visualización y califica las respuestas estrictamente teóricas dentro del dominio del cálculo como respuestas mayormente válidas, aunque no logra desarrollarlas.

4.3. Respuesta del profesor PE3

En la resolución de la tarea, PE3 comienza con un tratamiento en el registro algebraico: con una ecuación a dos funciones, activando así la génesis semiótica. Nuevamente

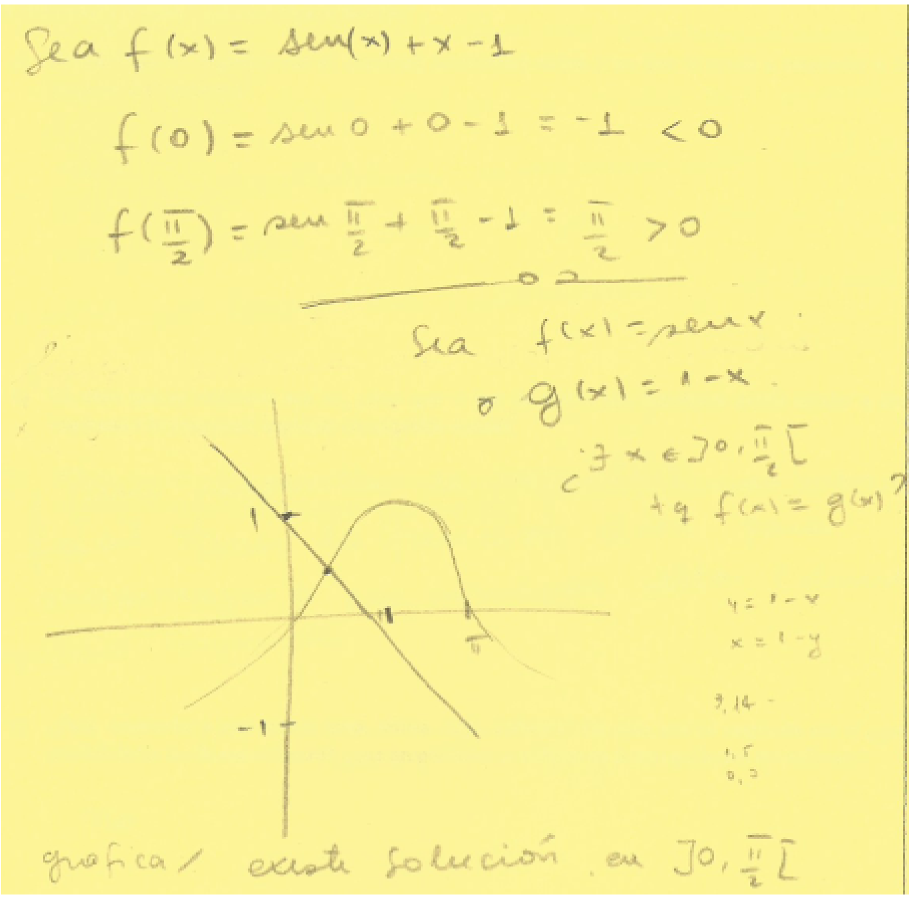


Figura 5: Segunda estrategia de la producción del profesor PE2 para la tarea

podemos decir que las funciones pueden ser una herramienta simbólica, de la componente "artefactos" del ETM, para constituir un instrumento de tipo simbólico. Luego PE3 dibuja la gráfica de las funciones ayudándose con algunos puntos que evalúa en las funciones. PE3 señala que *ese es el punto que busca* y que sabe que está en el intervalo solicitado (Figura 6).

Hasta este momento, observamos que se activan los planos [Sem-Dis] e [Ins-Dis], lo que nos señala la presencia de un discurso y por lo tanto, una prueba. PE3 declara que *esta no es una forma de demostrar* e intenta realizar lo que denomina como *demostración algebraica*, pero fracasa en su intento: realiza tratamientos a la ecuación propuesta en el enunciado para llegar a la igualdad: $f(x) = \sin(x) + x - 1$, y reconoce que debe determinar x de manera que $f(x) = 0$, pero no lo logra.

Nos resulta interesante observar que, aunque la profesora se mostraba convencida de su respuesta, expresa en la entrevista que *asume que esta no es una forma de responder a la pregunta, pues solo lo muestro gráficamente*. Al igual que PE2, PE3 entrega mayor validez a argumentos ajenos a la gráfica (en este caso, algebraicos), relegando el discurso que se extrae a partir de la visualización.

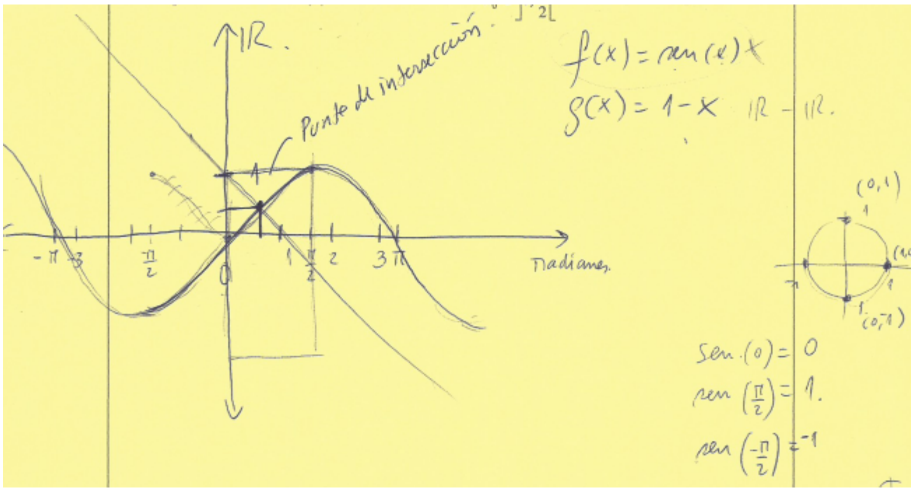


Figura 6: Producción del profesor PE3 para la tarea

4.4. Respuesta del profesor PE4

En la resolución de la tarea (Figura 7), PE4 comienza realizando un tratamiento en el registro algebraico manipulando el objeto ecuación. Este profesor introduce una nueva variable y escribe dos ecuaciones con dos variables (x e y), una dependiente de la otra. Luego, realiza una conversión al registro gráfico, con lo que obtiene en un mismo plano, dos curvas (una para cada ecuación). En esta parte del trabajo, evidenciamos la activación de la génesis semiótica y nos parece importante destacar que en la estrategia de PE4 para construir la gráfica se identifica la presencia de la función como herramienta simbólica.

Finalmente, PE4 señala en la gráfica el punto de intersección y lo establece como el punto que se buscaba (utilizando la notación x_0 y $f(x_0)$, es decir, podemos notar en su trabajo que reconoce una función, pero de manera implícita. PE4 declara que *de modo gráfico se prueba que sí existe*.

Identificamos en este trabajo principalmente la activación del plano vertical [Sem-Ins]. Los argumentos para dar respuesta a la pregunta provienen de lo que se visualiza en la gráfica. Además, PE4 declara que *la única forma que encontré de probarlo, fue de manera gráfica* y que *de esta forma se puede llevar al colegio, pero no de una manera más teórica*. Además, PE4 declara que *sé que se resuelve de otra forma, pero no recuerdo cómo esto lo vimos en la universidad*.

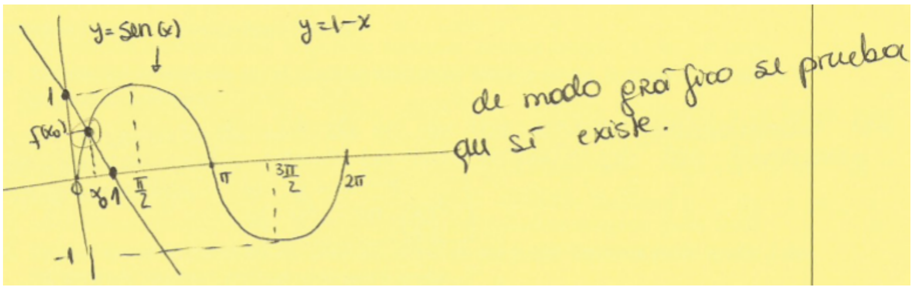


Figura 7: Producción del profesor PE4 para la tarea

4.5. Respuesta del profesor PE5

En la resolución de la tarea, PE5 comienza realizando tratamientos algebraicos para llegar a la ecuación $x = 1 - \sin(x)$. Así, como se pregunta si existe solución en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, intenta acotar la expresión $1 - \sin(x)$ por 0 y $\frac{\pi}{2}$, llegando, mediante tratamientos a una inecuación: $\sin(x)$ *debe estar entre* $\frac{2-\pi}{2}$ *y* 1. PE5 intenta observar este resultado en la gráfica, pero no logra concluir (Figura 8).

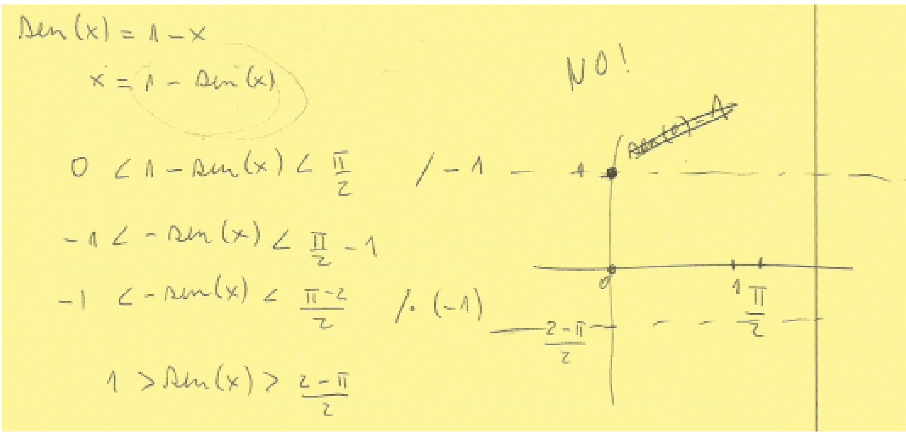


Figura 8: Producción del profesor PE5 para la tarea.

La activación de un plano vertical en este trabajo matemático se ve truncado. La génesis activada principalmente es la semiótica. PE5 no logra concluir ni construir hipótesis ni argumentos que respondan a la pregunta planteada en la tarea.

4.6. Respuesta del profesor PE6

En la resolución de la tarea, PE6 comienza estableciendo que 0 y $\frac{\pi}{2}$ son *puntos críticos*. Luego evalúa los puntos 0 y $90°$ (usa grados) en la ecuación principal (la del enunciado). Luego intenta realizar tratamientos a la ecuación, elevando al cuadrado y utilizando la identidad $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ (que podríamos considerar como un artefacto simbólico), pero en uno de los tratamientos comete un error y cambia el signo. Llega a que x debe ser igual a 0, pero antes probó que $x \neq 0$, lo que, según PE6, es una contradicción. No entrega una respuesta explícita, pero se puede inferir que concluye que no existe solución de la ecuación en el intervalo dado. Intenta un razonamiento por reducción al absurdo, pero fracasa (Figura 9).

En cuanto al ETM construido por PE6, se puede decir que se basa principalmente en el trabajo en la génesis instrumental. Identificamos la activación del plano vertical [Ins-Dis], aunque también hay una coordinación con la génesis semiótica, en los procesos de tratamiento y conversión.

En la entrevista, PE6 responde que *jamás se me habría ocurrido que acá hay una función, además de la función seno*, y que este tipo de problemas *resultaría demasiado complicado plantearlo en el colegio, pues los estudiantes siempre buscan una solución y no se les puede decir: acá no hay cómo encontrarla*. En esta respuesta de PE6, este pone en evidencia que las demandas y los objetivos en el colegio y en la universidad no son los mismos.

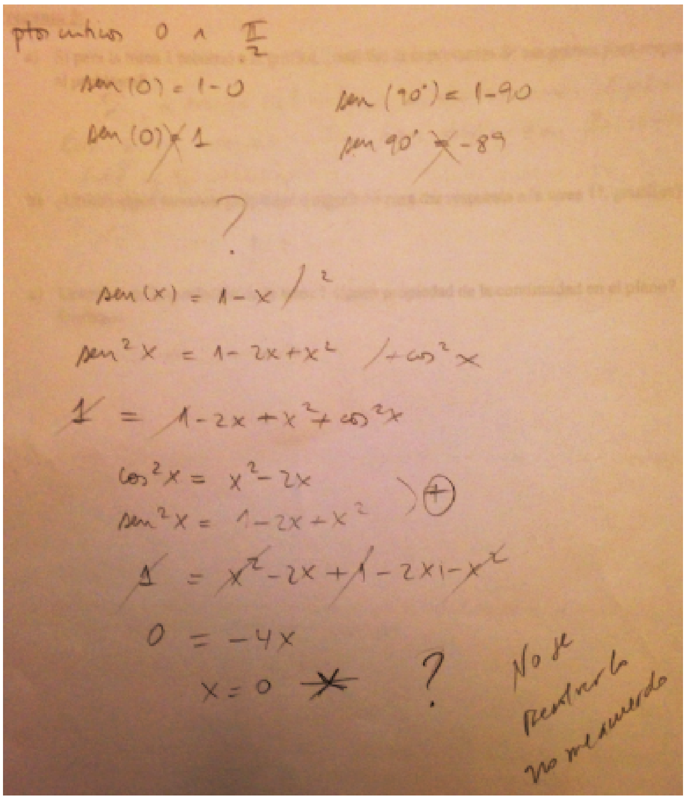


Figura 9: Producción del profesor PE6 para la tarea.

Año 18, N° 23, Enero – Junio 2020 (24 - 46)
ISSN 0717 – 9065 ISSN ON LINE 0719 – 8019

5. Principales resultados

A modo de síntesis, podemos decir que la mayoría de los profesores buscan entregar argumentos y construir un discurso para dar respuesta a la pregunta de la tarea tomando en cuenta distintos recursos. Podemos decir que todos los profesores que participaron en este estudio buscaron entregar una respuesta formal a la tarea, a partir del intento de construir una demostración, sin embargo, la mayoría no logró encontrar los elementos adecuados para establecer hipótesis que les permitieran llegar de manera lógica a una prueba con las características buscadas.

En las respuestas de los profesores PE5 y PE6 notamos una tendencia a posicionar el problema en un dominio algebraico y a intentar resolver la ecuación. En el caso del resto de los profesores, PE2, PE3 y PE4, lograron construir funciones y graficarlas, lo que indica que recurren a otros objetos para poder encontrar nuevos argumentos. El trabajo de estos profesores es principalmente de visualización.

Sin embargo, pese a que los profesores PE2, PE3 y PE4 lograron entregar argumentos que aseguraban la existencia de una solución en el intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, estos no reconocen este discurso como válido en su propio trabajo, aunque sí lo valoran para un trabajo en aula. Además, señalan que recuerdan la existencia de una forma de resolver este tipo de problemas, situados principalmente en la universidad, pero no son capaces de reconocer la manera específica de proceder. Esto podría interpretarse en el ETM como una búsqueda en su ETM de referencia, donde existían ciertos instrumentos simbólicos, pero no es posible para ellos reproducirlos en su ETM personal.

El único profesor que resolvió el problema utilizando teoremas de cálculo y funciones continuas fue PE1. Cabe destacar que este profesor, además de tener un magíster en matemáticas, realiza clases de cálculo en la universidad, por lo que asumimos que se encuentra cercano a este tipo de tareas por lo que encuentra los recursos para poder construir una demostración.

6. Discusiones y reflexiones finales

Para este estudio, planteamos como objetivo presentar la manera en que profesores de secundaria enfrentan un problema relacionado con el cálculo. La tarea que fue planteada a los profesores buscaba poner en juego diferentes procesos de visualización, instrumentalización y prueba y recurrir a distintos conocimientos, pues se trataba de una ecuación que no podía ser resuelta algebraicamente. Además, la tarea planteada entregaba la posibilidad de ser tratada en la etapa escolar, siempre y cuando los estudiantes contaran al menos con conocimientos sobre funciones trigonométricas y ecuaciones.

Así, intentamos evidenciar en la resolución de la tarea por parte del profesor aquello que este reconoce como argumento válido y qué es para él justificar algún conocimiento matemático. Lo que encontramos fue que los profesores buscan dentro de su cúmulo de conocimientos elementos para poner a disposición en su respuesta, transitando por distintos objetos: desde una ecuación obtienen dos funciones y se trasladan a propiedades y a formas de visualizar este último objeto.

Sin embargo, pudimos notar la resistencia que pone el profesor a entregar argumentos distintos a una demostración, incluso cuando la tarea no pedía demostrar explícitamente. Esto último lo podemos comprender en primer lugar desde la tarea misma, pues el profesor la reconoce como un problema inserto en un contexto universitario, lo que se evidencia en comentarios como: *sé que se resuelve de otra forma, pero no recuerdo cómo esto lo vimos en la universidad*, o *sé que se utiliza el teorema del valor intermedio, pero no sé cómo usarlo acá*. Por lo tanto, al ser un problema que se resuelve en la universidad y no en el colegio, el profesor asume que debe buscar en sus conocimientos adquiridos en la etapa universitaria recursos que le permitan construir una demostración de su respuesta, pues en esta institución frecuentemente no se acepta otro tipo de prueba ni razonamientos distintos a la demostración.

Al respecto, Yackel y Cobb (1996) se refieren a las normas sociomatemáticas como los aspectos normativos que son específicos de la actividad matemática de los estudiantes y demuestran, en su artículo, cómo estas normas regulan la argumentación matemática e influyen en los aprendizajes no solo de los estudiantes, sino también del profesor. Podemos decir que, según los resultados que encontramos en nuestro trabajo, el discurso del profesor está normado por lo que en la universidad se entiende como procedimiento válido para justificar, y los profesores se rigen por aquellas normas para conseguir una respuesta.

Además, observamos que las normas sociomatemáticas construidas en la universidad son diferentes a las presentes en la escuela, por lo que el profesor no valida sus argumentos en su propio trabajo, pero sí lo asume como un trabajo válido en la etapa escolar. Podemos decir que el profesor, al verse enfrentado al tipo de tarea que se le plantea en este trabajo, entra en una disyuntiva que tiene relación con las normas. En efecto, en la universidad el valor de lo que se hace matemáticamente está en la demostración, mientras que en el colegio es más valorado encontrar un resultado. Así lo evidencia PE6 cuando señala que *resultaría demasiado complicado plantearlo (el problema propuesto* *en este estudio) en el colegio, pues los estudiantes siempre buscan una solución y no se les puede decir: acá no hay cómo encontrarla.*

Por otro lado, podemos observar que hay recursos que el profesor adquiere en la universidad que ya no los tiene a su alcance cuando se encuentra inmerso en el sistema escolar. Postulamos que el profesor resuelve de manera distinta los problemas, en su propio trabajo matemático, cuando se encuentra inmerso en otro contexto y con otro rol: el de enseñante; los aspectos normativos que el profesor encuentra en el colegio podrían conducirlo a reducir a cálculos algorítmicos o a representaciones algebraicas, la esencia de lo que la matemática requiere. Esto se demuestra cuando el profesor no reconoce como válido un argumento que proviene de lo que visualiza de manera gráfica, cuando ahí se representa el fundamento del teorema del valor intermedio.

En el mismo sentido de lo anterior, en este trabajo pudimos observar que los profesores declaran estar acostumbrados a resolver este tipo de problemas en la universidad, y, sin embargo, reconocen al ser enfrentados a la tarea, que las técnicas de resolución fueron olvidadas. Esto nos hace cuestionarnos sobre la utilidad de resolver este tipo de problemas en la formación inicial de profesores sin admitir distintas formas de resolución, pues un problema que a simple vista constituye una demanda de elementos teóricos y la construcción de una demostración, termina siendo, en la etapa universitaria, un ejercicio de aplicación de técnicas que son desaprendidas cuando el profesor cambia de institución. En términos teóricos, interpretamos los algoritmos que permiten la resolución, como artefactos simbólicos del ETM adquiridos en la universidad y utilizados como instrumentos, que luego se pierden al no poseer un sustento más complejo que los resguarden.

Según Winslow y Gronbaek (2014), en la formación inicial de profesores se debería desarrollar el conocimiento completo y explícito de las técnicas instrumentadas que se necesitan para diseñar tareas en un entorno de aprendizaje instrumentado, y para explicar y evaluar sus resultados. Según los autores, la relación más delicada con las técnicas instrumentadas se aprende en la universidad. Así, el profesor puede desarrollar los fundamentos que explican las técnicas y comprender en profundidad el uso del artefacto y bajo qué contexto es válido para responder a situaciones matemáticas. En el caso del problema planteado en este estudio, notamos que los profesores no reparan en que su gráfica puede perfectamente sustentar sus argumentos, pues hay puntos que se encuentran lo suficientemente separados (por ejemplo, $\sin(0)$ de 0, y $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ de $\frac{\pi}{2}$) , cuestión que para ellos no es relevante, sino más bien se basan en normas aprendidas que descalifican elementos perceptivos como posibles argumentos válidos.

Volviendo al problema del nuevo profesor que planteaba Klein (1908), y que Winslow y

Gronbaek (2014) retratan bien cuando describen el problema de la "doble discontinuidad de Klein" en la vuelta del profesor desde la universidad (como estudiante) al colegio (como enseñante), a modo de reflexión podemos decir que el profesor inmerso en el sistema escolar no solo encuentra dificultades en cuanto a las transposiciones didácticas que debe realizar para enseñar los contenidos matemáticos a sus estudiantes, sino que debe reconocer en la actividad matemática de sus alumnos los elementos que permiten construir su conocimiento en cuanto a las prácticas que ponen en funcionamiento al visualizar o argumentar cuando se encuentran expuestos a problemas que lo demandan.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics, 18*(2), 147-176.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. American Educator. Fall 2005, 14-22 y 43-46. Recuperado de: https://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/handle/2027.42/65072/Ball_F05.pdf

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221–266.

Coutat, S. & Richard, P. R. (2011). Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 97-126.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique* *et de Sciences Cognitives, 10*, 5-53.

Duval, R. (1995), Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne, Suisse: Peter Lang. Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., & Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(3), 301-324-

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 175-193.

Houdement, C., & Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x, 51*, 5-21.

Houdement, C., & Kuzniak A. (1996). Autours des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématique, 16*(3), 289-321.

Klein, F. (1908). *Matemática elemental: Desde un punto de vista superior*. Vol I. Traducción de Fontanilla. Madrid: Biblioteca Matemática.

Kuzniak, A. (2011 a). *Understanding geometric work through its development and its transformations*. Laboratoire de Didactique André Revuz, University Paris-Diderot, Paris, France.

Kuzniak, A. (2011 b). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 9-24.

Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM, 48*(6), 721-737.

Kuzniak, A., Nechache, A., & Drouhard, J. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM, 48*(6), 861–874.

Ministerio de Educación (MINEDUC) (2019). *Bases curriculares 3ero y 4to medio* (pp.102-115). Santiago de Chile: MINEDUC Recuperado de: https: //curriculumnacional.mineduc.cl/614/ articles-91414_bases. pdf

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe*. Paris: Seuil.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 17*(3) (número especial). Recuperado de https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a

Ruiz, J. (2003). *Metodología de la investigación cualitativa*, 3era edición. Bilbao: Universidad de Deusto.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard University Review, 57*(1), 1-21.

Stake, R. E. (2000). Case studies. En N.K. Densin & Y.S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research second edition* (pp. 134-164). Thousand Oaks, California, USA: Sage Publications.

Trouche, L. (2004). Managing complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding student's command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9*, 281-307.

Winslow, C. & Gronbaek, N. (2014). Klein's doublé discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *RDM Newsletters, 34* (1), 59-86.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*, 458–477. https://www.jstor.org/stable/749877

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., $ Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 36*(2), 105-123.