Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica
Año 18, Nº 23, Enero - Junio 2020
ISSN 0717-9065 ISSN ON LINE 0719-8019
Artículo de investigación, pp. 69 - 84

La generalización como estrategia cognitiva para construir la conjetura en una actividad de conteo[1]

Marcela Parraguez González [2]
Valeria Randolph Veas[3]

Resumen

Al alero de la didáctica de la matemática, el presente artículo, con base en la teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y a través del mecanismo de la generalización, se propuso interpretar las estrategias cognitivas incluidas en la construcción de una conjetura en una actividad de conteo. Desde el punto de vista metodológico, se trata de un estudio de caso único, con datos proporcionados por un profesor de matemática en su abordaje de distintas situaciones de la actividad "Contar es el comienzo". Se concluye, por un lado, que las construcciones figurales utilizadas son fundamentales para alcanzar la construcción de la conjetura y, por otro, que algunas conjeturas erróneas son producto de la elección de situaciones que no permiten la generalización.

Palabras clave: conteo, generalización, Teoría APOE.

[1]Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto FONDECYT Nº1180468.. Agradecemos a los participantes por la buena disposición en la investigación.

[2]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile. ✉ marcela.parraguez@pucv.cl. ORCID:0000-0002-6164-3056

[3]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile. ✉ valeria.randolph.v@mail.pucv.cl. ORCID:0000-0003-3456-9193

Fecha de Recepción: 06 de mayo de 2020
Fecha de Aceptación: 04 de junio de 2020

Paulo Freire. Revista de Pedagogía Crítica
Año 18, Nº 23, Enero - Junio 2020
ISSN 0717-9065 ISSN ON LINE 0719-8019
Artículo de investigación, pp. 69 - 84

The generalization as a cognitive strategy to build conjecture in a counting activity

Marcela Parraguez González [1]
Valeria Randolph Veas[2]

Abstract

From the Didactics of Mathematics, this article based on APOS theory and through the generalization mechanism proposed to interpret the cognitive strategies included in the construction of a conjecture in a counting activity. From a methodological point of view, the study focuses on the Case Study, with data provided by a mathematics teacher —attended as a Unique Case— when addressing different situations in the counting activity is the beginning. It concludes, on the one hand, that the figurative constructions used are essential to achieve the construction of the conjecture, and on the other hand, some erroneous conjectures are shown that are the product of the choice of situations that do not allow generalization.

Key words: counting, generalization, APOS Theory.

[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. ✉ marcela.parraguez@pucv.cl. ORCID:0000-0002-6164-3056
[2]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. ✉ valeria.randolph.v@mail.pucv.cl. ORCID:0000-0003-3456-9193

1. Introducción

La acción de contar está presente en innumerables tópicos de la matemática, pero sin duda los tópicos que más la hacen explícita son la combinatoria, la permutación y la probabilidad (Vilenkin, 1972). Sin embargo, el conteo también se encuentra en situaciones figurales como la siguiente: ¿Cuántos cuadrados tiene la Figura 1?

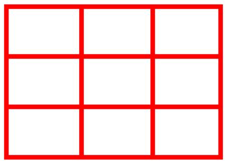


Figura 1: Contemos la cantidad de cuadrados

Una primera respuesta, sin mayor reflexión y a primera vista, insta a responder que el total es 9, pero si prestamos atención y contamos con una estrategia que nos permita alcanzar casos más específicos, debemos ordenar nuestro procedimiento de conteo, por ejemplo, como se presenta a continuación.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cantidad de Cuadrados de } 1 \text{ por } 1 = 9 = 3^2 \\ \text{Cantidad de Cuadrados de } 2 \text{ por } 2 = 4 = 2^2 \\ \text{Cantidad de Cuadrados de } 3 \text{ por } 3 = 1 = 1^2 \end{array}\right\} \text{Total cuadrados } = 14$$

La estrategia utilizada de contar permite alcanzar la generalización para un cuadrado de 4 por 4, 5 por 5, ..., hasta n por n, y conjeturar que la cantidad de cuadrados está dada por $\sum_{i=1}^{i=n} i^2$.

Esta formulación que se muestra en la actividad anterior es justamente lo que se propone atender en este artículo: mostrar evidencias con sustento teórico del proceso que conlleva a la construcción de una conjetura en una situación de conteo, pasando por procesos que puedan ser generalizados.

En este artículo se entenderá por conjetura, a una afirmación que se supone cierta, pero que no ha sido probada ni refutada hasta este instante (Hernán, 1982). Una vez que se demuestra la veracidad de la conjetura, pasa a ser considerada un teorema con toda propiedad y puede ser utilizada como tal para construir otras demostraciones formales. En Didáctica de la Matemática existen investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender conceptos relativos al conteo en situaciones específicas, concernientes al orden de sus elementos, principalmente en permutaciones, combinatoria (Roa, Batanero y Godino, 2003) y probabilidad (Álsina, 2013; Vásquez y Alsina, 2017a). Sin embargo, en este escrito se quiere resaltar dos estudios en esta área.

El primer estudio (Salgado y Trigueros, 2009) presenta una propuesta didáctica para el aprendizaje de las ordenaciones y combinaciones, apoyada en una teoría centrada en las construcciones mentales necesarias para la adquisición del saber matemático. Las secuencias que utilizaron estas investigadoras para la recogida de datos, ayudaron a los estudiantes participantes a efectuar las construcciones mentales que se propusieron hipotéticamente y los llevaron a un mejor aprendizaje del conteo en las permutaciones y la combinatoria. En las proyecciones de esa investigación, las autoras indican que su propuesta didáctica resuelve parte del tema de conteo, pero que queda otra parte inmensa para una futura investigación.

La segunda investigación (Maturana, Parraguez y Nettle, 2015) aborda tres situaciones de conteo con base en configuraciones figurales aplicadas a estudiantes de educación media y superior, y muestra que acciones sobre construcciones mentales objetos, posibilitan la generalización como un proceso cognitivo necesario en la matemática.

Como proyección de las dos investigaciones anteriores, el presente artículo examina procesos de conteo en una situación figural —acciones sobre objetos concretos— que permitan ser generalizados, para constituirse en un objeto abstracto, —que es la conjetura—. El aporte radica en el hecho de mostrar a la comunidad interesada en estas temáticas, situaciones figurales en las que emergen las generalizaciones que conducen a la conjetura en una situación de conteo. En beneficio de los futuros enseñantes y aprendices, cabe preguntarse si es posible ayudar a un mayor número de aquellos a aprender cómo construir situaciones figurales, donde emerjan generalizaciones que conduzcan a la conjetura en una situación de conteo.

2. Objetivo de investigación

El objetivo de la investigación que se comunica en este artículo fue describir las estructuras mentales que docentes ponen en juego para la construcción o reconstrucción de una conjetura, (1) mostrando algunas conjeturas erróneas a las que se podría llegar cuando se eligen ejemplos que no permiten la generalización y (2) exhibiendo un par de ejemplos que permiten concretar la generalización y obtener la conjetura.

3. Teoría APOE

La Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), desarrollada por Dubinsky (Arnon et al., 2014) y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), es una teoría cuya base epistemológica se sustenta en el mecanismo de la abstracción reflexiva propuesto por Piaget (Dubinsky, 1991), y cuya finalidad es describir la construcción de objetos mentales relacionados con fragmentos específicos de la matemática, a través de mecanismos mentales, como se explica a continuación.

3.1. Construcciones y mecanismos mentales que interpretan la construcción de fragmentos de la matemática

Consideremos un fragmento de la matemática, que llamaremos F. Un estudiante muestra una construcción acción de F. Las transformaciones que hace sobre F las realiza paso a paso, de forma explícita, guiado por instrucciones que son externas a él y que le entregan indicaciones precisas sobre qué debe hacer con F. Aunque las acciones de F son las construcciones mentales más primarias, estas son importantes y muy necesarias para el desarrollo de otras construcciones. Cuando las acciones de F se repiten y el estudiante reflexiona sobre ellas y deja de depender de las instrucciones externas, adquiriendo con ello un control interno sobre lo que hace (o imagina) de F, se dice entonces que el estudiante ha interiorizado la acción de F en un proceso de F. La construcción mental proceso de F se caracteriza por la capacidad que el estudiante ha alcanzado para imaginar la ejecución de los pasos a seguir con F, sin tener necesariamente que representar cada uno de ellos explícitamente, pudiendo incluso desechar algunos. Por otra parte, dos o más procesos de F pueden coordinarse para construir un nuevo proceso de F. Además, un proceso de F puede revertirse o generalizarse en un proceso más extenso que lo incluya. Si el estudiante puede aplicar acciones a F sin que este se desarme y se logre entender ese proceso como un todo ligado, entonces se dice que ha encapsulado el proceso de F en un objeto cognitivo de F. Cuando el estudiante vuelve desde el objeto de F al proceso que le dio origen a F, se dice que ha desencapsulado el objeto de F en un proceso de F.

Para esta teoría, un esquema de F es una colección de acciones, procesos, objetos y esquemas (de otros conceptos) relacionados en la mente del estudiante como una estructura cognitiva coherente, donde la coherencia es entendida como la capacidad del estudiante para reconocer relaciones al interior del esquema de F y establecer cuándo usarlo en un problema para alcanzar su solución.

3.2. La construcción de un objeto abstracto a partir de la interiorización de acciones concretas

Para atender el proceso mental que conlleva la construcción del mecanismo de la generalización que conduzca a una conjetura en una situación de conteo, se va a operacionalizar la teoría APOE, tal como lo proponen Arnon et al (2014), esto es, realizando acciones sobre objetos concretos —objeto que existe en la realidad y puede ser percibido por los sentidos—. En el contexto de esta investigación, se contó con diversas situaciones figurales para determinar cuáles de ellas se interiorizan en proce-sos que se encapsulan en un objeto abstracto —objeto que no posee materia, pero que se pueden definir—, que es la conjetura vía la generalización (ver figura 2).

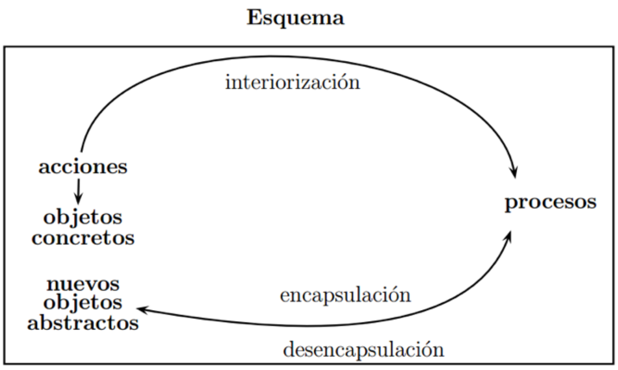


Figura 2: Teoría APOE entre lo concreto y lo abstracto (Arnon et al., 2014, p.154)

4. Método

Desde el paradigma cualitativo se ha seleccionado el estudio de caso único (Stake, 2010) como método para alcanzar el objetivo propuesto porque permite una indagación en profundidad de una realidad específica en un período de tiempo.

Los criterios seguidos para la conformación del Caso Único fueron: (a) Ser profesor de universidad; (b) Haber sido profesor de la asignatura Tópicos de Álgebra y (3) Asegurar Accesibilidad de los investigadores. El Caso Único quedó constituido, entonces, como se presenta en la Tabla 1.

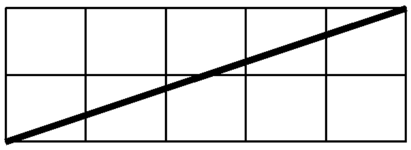
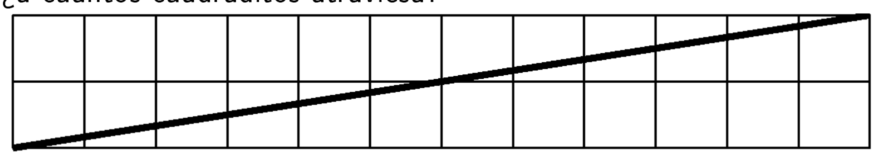
Tabla 1: Participante y caso de estudio

Caso	Participantes	Nivel	Características	Identificación
Caso Único	Profesor Universitario	Posgrado	Haber dictado la Asignatura de Tópicos de Álgebra	P1

4.1. Recogida de datos

En esta indagación se utilizó como instrumento de recogida de datos una actividad a la que se ha llamado "Contar es el comienzo", que contiene 4 situaciones descritas en la Tabla 2, aplicada a P1 en tres etapas, las cuales fueron videograbadas. Posteriormente se transcribieron todos los episodios de su puesta a prueba. El diseño de esta actividad estuvo inspirado en un problema de ingenio con papel cuadriculado de un texto de matemática para segundo año de enseñanza media (Bamón, González y Soto, 2002, p. 126).

Tabla 2: Actividad *Contar es el comienzo*

Situaciones	Pregunta
S1	He aquí un rectángulo de 2×5. Si se traza la diagonal principal, ¿a cuántos cuadraditos atraviesa? 
S2	Si el rectángulo es de 2×12, la diagonal principal, ¿a cuántos cuadraditos atraviesa? 
S3	Sin dibujar el cuadriculado correspondiente ¿A cuántos cuadraditos atraviesa una diagonal de un cuadriculado de $n \times n$, donde n es un número natural?
S4	Sin dibujar el cuadriculado correspondiente ¿A cuántos cuadraditos atraviesa una diagonal de un cuadriculado de $n \times m$, donde n, m son números naturales y distintos?

El objetivo de esta actividad es mostrar el proceso de conjeturar que, a través de sus diferentes situaciones figurales, se pueden mostrar instancias de generalizaciones —descritas en la Descomposición Genética (DG) de la actividad— que permiten alcanzar la conjetura, y otras que no.

4.2. Descomposición genética de contar es el comienzo

En la Tabla 3, se presenta una DG de la actividad Contar es el comienzo, utilizando como indicadores diferentes argumentos observables que describen a las estructuras y a los mecanismos mentales.

Tabla 3: Una DG para *Contar es el comienzo*

Construcción Mental	Indicadores de la construcción mental
Acciones sobre Objetos Concretos	- La *acción* de identificar cada cuadrito que es atravesado por la diagonal principal del rectángulo en S1 y S2. - La *acción* de realizar el conteo de los cuadritos que son atravesados por la diagonal principal del rectángulo en S1 y S2.
Procesos que se encapsulan en un Objeto Abstracto	- La *acción* de realizar el conteo de los cuadritos que son atravesados por la diagonal principal en otros rectángulos distintos a S1 y S2. - Repetir (y reflexionar sobre) la *acción* de seguir una estrategia de conteo sobre los cuadritos que son atravesados por la diagonal principal en los rectángulos S1, S2 y otros distintos a éstos. - Repetir (y reflexionar sobre) la *acción* de visualizar una generalización de la estrategia de conteo de los cuadritos que son atravesados por la diagonal principal en el objeto concreto cuadrícula. - Interiorización de que la cantidad de cuadritos atravesados en nxm, se relaciona con la intersección de la diagonal principal del rectángulo con las esquinas de los cuadritos.
Desde la generalización a la conjetura	- Coordinación de los procesos. La generalización de la estrategia de conteo de los cuadritos atravesados por la diagonal principal y la cantidad de cuadritos atravesados se relaciona con la intersección de la diagonal principal con las esquinas de los cuadritos. - La *acción* de dividir el rectángulo en bloques usando las intersecciones de la diagonal con las esquinas de los cuadritos en el objeto abstracto conjetura n+m-mcd(n,m)

5. Evidencias

A continuación, se presenta el análisis de las respuestas del profesor P1 a la situación "Contar es el comienzo" y los comentarios incluidos en la discusión de estas desde la teoría APOE, a través de la DG propuesta en la Tabla 3. Es importante señalar que acá el interés consiste en indagar la posibilidad de validar o refinar las acciones sobre objetos concretos previstos en la DG y que P1 mostró a través de la generalización de los procesos que lo conducen a una conjetura.

5.1. Acciones que se interiorizan en objetos concretos

Para dar respuesta a la situación S1 y S2, lo primero que P1 hizo para identificar los cuadraditos que atraviesa la diagonal, fue marcarlos con una X, como se aprecia en la Figura 3. Así con esta estrategia —de marcar con X— P1 responde que la diagonal principal del rectángulo atraviesa a 6 cuadraditos en S1 y a 12 en S2.

Esta forma de etiquetar que P1 utiliza para contar los cuadraditos que atraviesa la diagonal, interpretada desde la Teoría APOE, muestra en P1 una acción sobre el objeto

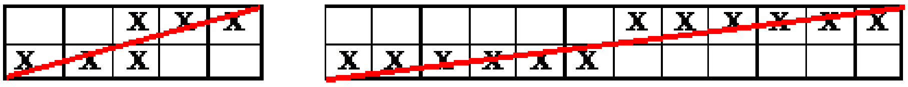


Figura 3: P1 marca los cuadraditos con una X en S1 y S2.

concreto cuadrícula rectangular y más adelante menciona cómo P1 transforma esto en un proceso cognitivo.

La estrategia utilizada por P1 en la Figura 3 para contar los cuadraditos, lleva a P1 a pensar que el número de cuadraditos que la diagonal principal atraviesa al rectángulo depende de la paridad del lado más largo. Como en la situación S1, 5 es impar, entonces se atraviesan a $5+1$ cuadraditos. Por otro lado en S2, 12 es par, por ende, se atraviesan a 12 cuadraditos. Con base en estos análisis, P1 levanta la siguiente **conjetura 1:** *si la longitud m del lado más grande del rectángulo es un número impar, entonces se atraviesan a $m+1$ cuadraditos; y si dicha longitud es par solo se atraviesan a m cuadraditos.*

Desde la teoría APOE, esta conjetura de P1 se interpreta como producto de una *acción* sobre el *objeto* concreto cuadrícula, pero que no es el resultado de la encapsulación de un proceso a través de la generalización de su estrategia. Después, en los párrafos que continúan, se evidencia la búsqueda que P1 hace de ese proceso, el cual le permite generalizar su estrategia.

Una vez anunciada la **conjetura 1**, P1 decide verificar si tal conjetura se cumple para otros rectángulos. Y es así como P1, considera rectángulos más anchos, como los de la Figura 4.

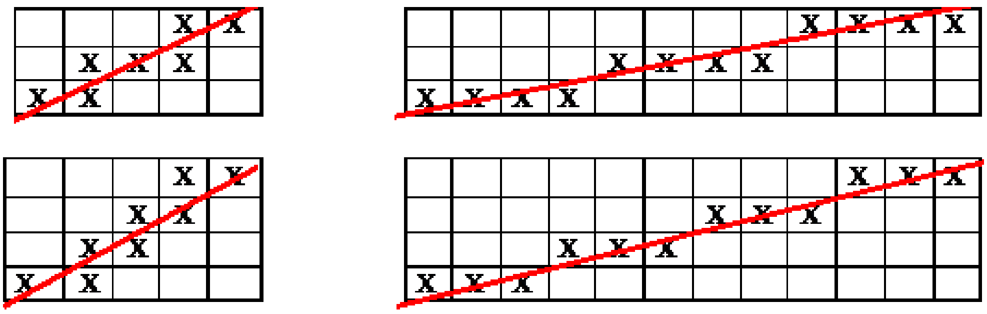


Figura 4: P1 diseña otros casos para probar su conjetura 1.

P1 comenta que en la Figura 4 se puede visualizar una generalización, y para ello P1 considera un rectángulo de $n\times 5$, diciendo que el número de cuadraditos atravesados por la diagonal principal aumenta en 1 cada vez, mientras que en el rectángulo de $n\times 12$ se mantiene constante el número de cuadraditos atravesados. Luego, P1 refina su conjetura e indica que se puede anunciar una **conjetura 2:** *si se tiene un rectángulo de $n \times m$, el número de cuadraditos atravesados será $m + m - 1$, cuando m es impar, y m cuando m es par*. Y a continuación, P1 vuelve sobre la conjetura 2, diciendo: *si m es impar, entre más ancho es el rectángulo, más cuadraditos se atraviesan, pero si m es par, pareciera que siempre se atraviesa el mismo número de cuadraditos*.

Desde nuestro referente teórico APOE, lo anteriormente expuesto sugiere que P1 evidencia la interiorización de la acción de contar en otros rectángulos diferentes a S1 y S2, en dos procesos (m par e impar), pero que no logran ser coordinados a través de la generalización que P1 propone.

A continuación, P1 comenta que algo extraño pasa con la conjetura 2 si agregamos una fila más a dos (de los cuatro) rectángulos de la Figura 4, como se muestra en la Figura 5.

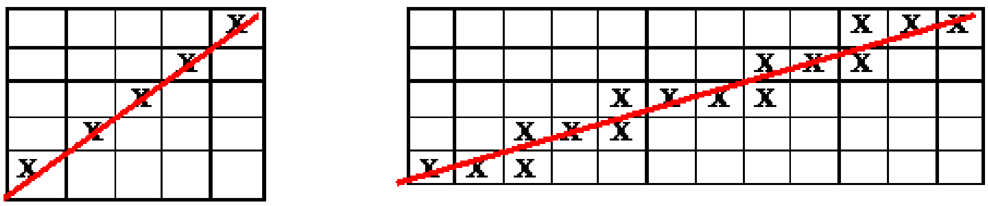


Figura 5: P1 diseña otros casos para probar su conjetura 2.

5.2. Procesos que se encapsulan en un objeto abstracto

Posteriormente, P1, mirando los rectángulos de la Figura 5, declara que los roles cambian, esto es, el rectángulo de $n \times 5$ solo atraviesa 5 cuadraditos y en el rectángulo $n \times 12$ atraviesa $n \times 12 - 1$ cuadraditos. Entonces P1 se pregunta: ¿qué es lo que pasa?, ¿por qué la conjetura 2 que involucra a la paridad dejó de funcionar?

P1 observa nuevamente las Figuras 3, 4, 5 y declara que la única diferencia entre la Figura 3 y la Figura 5, es que ahora en el rectángulo de $n \times 5$, la diagonal pasa por las esquinas de los cuadraditos, hecho que antes no ocurría, mientras que en el rectángulo de $n \times 5$ la diagonal no pasa por ninguna esquina. Por otro lado, comenta P1, pareciera que el punto clave no es la paridad, sino el hecho de que la diagonal atraviese o no las esquinas de algunos cuadraditos.

Después de este cambio de foco en el conteo figural que viene realizando, P1 anuncia que podría proponer una **conjetura 3:** *si tenemos un rectángulo de $n \times m$, atraviesa a m cuadraditos si la diagonal pasa por la esquina de algún cuadradito; y atraviesa a $n \times m - 1$ cuadraditos, cuando no pasa por la esquina*.

Sin embargo, P1 aún no convencido de resolver todos los casos en su totalidad, —a través de la conjetura 3— se pregunta: ¿qué pasa con un rectángulo un poco más grande?, por ejemplo, en uno de 6×15, ¿la diagonal atraviesa a $6 + 15 - 1 = 20$ cuadraditos? Sin duda con esta última pregunta, P1 lo que persigue es construir un proceso que le permita alcanzar la conjetura a través de una generalización en su estrategia de contar los cuadraditos.

5.3. La generalización como estrategia cognitiva para construir la conjetura

P1 al contar los cuadraditos de la Figura 6, se da cuenta que la diagonal atraviesa a 18 cuadraditos y ese número no coincide con el que le arroja la conjetura 3.

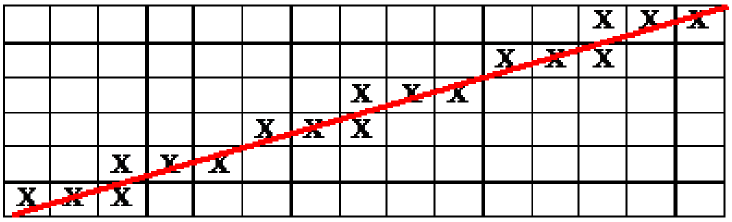


Figura 6: P1 diseña otro caso para probar su conjetura 3.

Entonces, P1 —después de ver que ambas cuentas no coinciden— se pregunta ¿será que todo el trabajo anterior no sirve?, y justamente en ese momento surge la idea: ¿qué pasa si dividimos nuestra cuadrícula en bloques usando intersecciones de la diagonal con las esquinas de los cuadraditos?

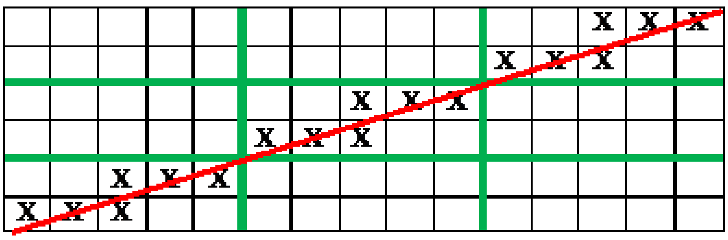


Figura 7: P1 divide la cuadricula.

Este último hecho importante, el que P1 declara —*demarcar los bloques en la cuadrícula*— se interpreta, desde la teoría APOE, como una *acción* que se realiza sobre el *objeto* concreto —*la cuadrícula*—, que permitirá interiorizarla en un *proceso* de generalizar la estrategia de conteo, para alcanzar con ello el *objeto* abstracto —la conjetura—, como de describe a continuación.

Al dividir en bloques la cuadrícula, como se muestra en la Figura 7, P1 señala que de esa manera se excluye la posibilidad de que la diagonal pase por alguna esquina, y se puede usar la conjetura 3 (que se dedujo para el caso de que la diagonal no intersecte ninguna esquina) con la finalidad de contar el número de cada cuadradito en cada uno de los bloques, para después multiplicar por el número de bloques. Para el caso de la Figura 7, P1 relata que se tienen 3 bloques y cada bloque es de 2×5, luego se tienen $(2 + 5 - 1) \times 3 = 18$ cuadraditos. Este último análisis le permitió a P1 realizar una generalización de la estrategia utilizada que se formula como sigue: en general, si consideramos un rectángulo de $n \times m$ y llamamos ε al número de bloques obtenidos, usando las intersecciones de la diagonal con las esquinas de los cuadraditos, cada bloque sería un rectángulo de $\frac{n}{\varepsilon} \times \frac{m}{\varepsilon}$. Luego, aplicando la conjetura 3, tendríamos que el número de cuadraditos atravesados es: $\left(\frac{n}{\varepsilon} + \frac{m}{\varepsilon} - 1\right) \cdot \varepsilon = n + m - \varepsilon$

Ahora, el problema que tiene P1 es cómo determinar el valor de ε. Sin embargo, P1 declara que esto es fácil, porque ε debe ser un número entero que divide tanto a n como a m, pues los bloques deben tener como longitud un número entero. Y, además, este número debe ser el entero más grande que divide a ambos números, porque se quiere excluir todas las intersecciones de la diagonal con las esquinas.

Ahora bien, como P1 conoce el concepto de máximo común divisor, puede concluir que épsilon es el máximo común divisor entre n y m, lo que permite a P1 formular la **conjetura 4**: *el número de cuadraditos que atraviesa la diagonal en un rectángulo de* $n \times m$, *está dado por* $n + m - mcd(n, m)$.

Desde la teoría APOE, lo anterior significa que la *acción* de dividir el rectángulo en bloques usando las intersecciones de la diagonal con las esquinas de los cuadritos, le permitió a P1 encapsular el *proceso* de conteo figural en el *objeto* abstracto, esto es, la construcción de la conjetura.

6. Conclusiones

Después de abordar e interpretar desde APOE las diferentes situaciones figurales que nos planteara P1 para abordar *Contar es el Comienzo*, consideramos que ellas se pueden reducir en cantidad en una sola situación, con base en una cuadrícula suficientemente grande y que permite alcanzar la conjetura como un objeto abstracto. A continuación, proponemos esta situación matemática: Considere un piso embaldosado de 5×15, metros, cubierto por baldosas cuadradas de un metro, como se muestra en la Figura 8.

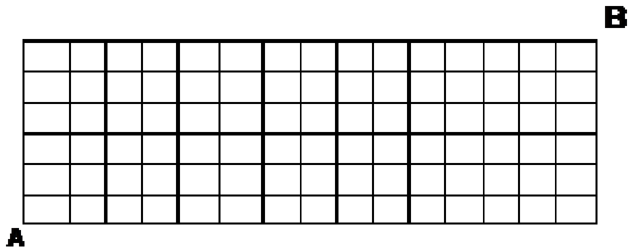


Figura 8: Embaldosado de 6×15.

¿Cuál es el menor número de baldosas que tienes que pisar para ir de **A** a **B**?

Asumiendo que tenemos presente que la distancia más corta entre dos puntos es la recta, lo natural será tratar de caminar por la diagonal, sin embargo, esto no es tan claro de deducir en cuadrículas muy angostas (Ver Figura 9).

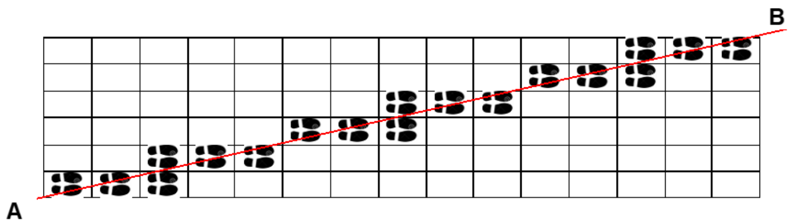


Figura 9: Caminando por la Diagonal.

Para ir de **A** a **B** (en la Figura 9), lo primero que debemos notar es que tenemos que avanzar 15 metros hacia la derecha y 6 metros hacia arriba. Suponiendo que siempre vamos de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba (ir hacia abajo o hacia la izquierda claramente haría más largo el recorrido), tenemos que pisar como máximo 15 baldosas caminando en dirección horizontal y $5 = 6 - 1$ baldosas en dirección vertical (Ver Figura 9). Restamos uno en la vertical, pues al pisar al menos una baldosa horizontal ya avanzamos una unidad vertical también. Luego, a lo más pisamos $15 + 6 - 1$.

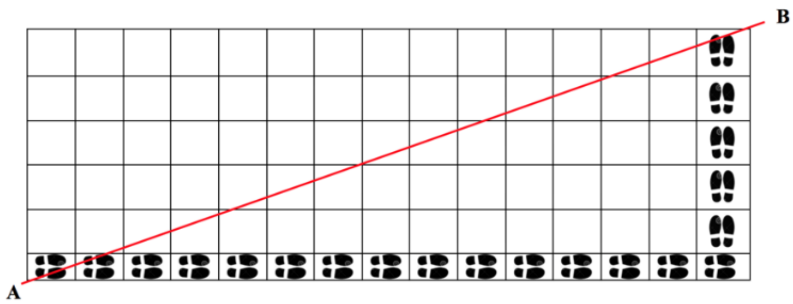


Figura 10: Avanzando de **A** a **B** en horizontal y vertical.

Sin embargo, esto ocurre solamente cuando avanzamos ya sea en dirección vertical o en dirección horizontal, pero no en ambas direcciones simultáneamente, como se muestra en la Figura 10.

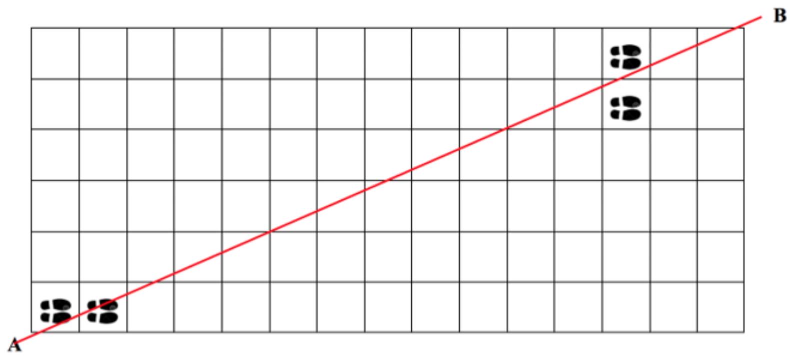


Figura 11: Avanzando de **A** hacia **B**.

No obstante, en la Figura 11 podemos observar que cada vez que la diagonal interseca la esquina de alguna baldosa, podemos avanzar en ambas direcciones simultáneamente, lo cual nos ahorra pisar una baldosa por cada intersección.

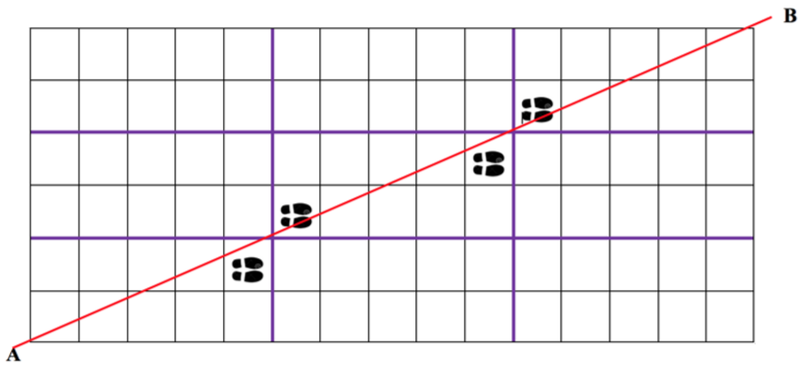


Figura 12: Cuando la diagonal interseca una esquina.

Luego, observando que el número de intersecciones es el número de bloques menos uno (ver Figura 12) y recordando que el número de bloques es igual al mcd(6,15), se evita pisar $mcd(6, 15) - 1$, baldosas en el recorrido de **A** a **B**. Luego, el número mínimo de baldosas necesarios para ir de A hacia B es: $15 + 6 - 1 - (mcd(6, 15) - 1) = 15 + 6 - mcd(6, 15)$.

Este mismo piso se generaliza a cualquier embaldosado de $l \times a$, baldosas cuadradas, dando como número mínimo de baldosas pisadas para ir de **A** a **B**: $l + a - mcd(l, a)$.

Proponemos esta situación de conteo figural a la comunidad interesada en estas temáticas, como un desafío que usa la generalización de un proceso para alcanzar la construcción de una conjetura.

Referencias Bibliográficas

Alsina, Á (2013). La estadística y la probabilidad en Educación Infantil: conocimientos disciplinares, didácticos y experienciales. *Didácticas Específicas, 7*, 4-22.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

Bamón, R., González, P. & Soto, J. (2002). *Matemática Activa: Segundo Medio*. Santiago de Chile: Mare Nostrum.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Hernán, F. (1982). *Estrategias, conjeturas y demostraciones*. Velencia: Institut de Ciences de l'Educació, Universitat de Valéncia.

Maturana, I., Parraguez, M., & Nettle, A. (2015). APOE y la Generalización como Estrategia Cognitiva para el Aprendizaje en Técnicas de Conteo. En P. Scott y A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 17: Talleres y minicursos*, (pp. 33-45). República Dominicana: CIAEM.

Roa, R., Batanero, C., & Godino, J.D. (2003). Estrategias generales y estrategias aritméticas en la resolución de problemas combinatorios. *Educación Matemática, 15*(2), 5-25.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática, 21*(1), 91-117.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos* (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Vásquez, C. & Alsina, A. (2017a). Proposiciones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria.

Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 21(1), 433-457.

Vilenkin, N. (1972). *¿De cuántas formas?: Combinatoria*. Moscú: MIR.

ISSN 0717 – 9065 ISSN ON LINE 0719 – 8019